Ejercicios sobre ondas electromagnéticas.

Jesús María Mora Mur

19 de abril de 2026

1 Primer ejercicio

Comprobaremos en primer lugar, que $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy - z^3 & x^2 & -3xz^2 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Comprobaremos también que el campo magnético es solenoidal, es decir que $\nabla \bullet \vec{B} = 0$:

$$\nabla \bullet \vec{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(2xy, -y^2, 1 \right) = 2y - 2y = 0$$

Por lo que vemos que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son estáticos. Para calcular la densidad volumétrica recurrimos a la *Ley de Gauss* en su forma diferencial:

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Calculando la divergencia obtenemos que:

$$\nabla \bullet \vec{E} = 2y - 6z$$

Igualando, obtenemos:

$$\rho = 2\epsilon_0 \cdot (y - 3z)$$

Para calcular $\vec{J}$, seguimos la *Ley de Ampère*, donde $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{2xy}{\mu_0} & \frac{-y^2}{\mu_0} & \frac{1}{\mu_0} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{\mu_0}\hat{k}$$

2 Segundo ejercicio

1. *Verdadero*. La corriente de conducción se mide en amperios, al igual que la de desplazamiento.

2. *Verdadero*. Sabemos que la corriente de desplazamiento es directamente proporcional a la tasa de cambio del flujo eléctrico a lo largo del tiempo en una región definida. Si el flujo cambia, el campo ha de modificarse.

3. *Falso*. Las ecuaciones de Maxwell pueden adaptarse a campos no estáticos. En concreto, la Ley de Gauss:

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

sigue siendo válida, así como:

$$\nabla \bullet \vec{H} = 0$$

al no existir fuentes o sumideros magnéticos. Por otro lado, las ecuaciones que implican a los rotacionales varían añadiendo términos diferenciales que definen el dinamismo de los campos.

4. *Verdadero*. Mediante la ley de Ampère-Maxwell se predice la existencia de ondas electromagnéticas y puede obtenerse su ecuación.

5. *Verdadero*. Las ondas electromagnéticas son transversales al ser la dirección de propagación perpendicular a la oscilación de $\vec{B}$ y $\vec{E}$.

3 Tercer ejercicio

Viendo la ecuación, tenemos que:

- La frecuencia de la onda es $2\pi \cdot 10^6 \text{ hz}$, al multiplicar al tiempo.
- El número de onda es $\pi/2$, al multiplicar a la coordenada de propagación z.
- Esta onda se propaga en el sentido positivo del eje, por llevar delante de z un signo negativo.

Por otro lado, calculamos la impedancia de la onda mediante la siguiente relación:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7\,\Omega$$

Para calcular el campo magnético, sabemos que:

$$\vec{B} = \vec{E} \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0} = \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \cdot 60\pi \cos\left(2\pi \cdot 10^6 t - \frac{\pi}{2} z\right) \vec{a_x}$$