

## Actividad 2: Boletín de problemas general.

Jesús María Mora Mur

10 de mayo de 2026

### 1. Primer ejercicio.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las siguientes para las coordenadas generalizadas:

$$q_i = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

obteniendo las 4 siguientes:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{y_1 - y_2}{r} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_2 - \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_2 - \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{y_1 - y_2}{r} = 0$$

Al ser el potencial  $V(r)$  la única parte de la función lagrangiana dependiente de las coordenadas no derivadas.

### 2. Segundo ejercicio.

Necesitamos en primer lugar los momentos conjugados:

$$\begin{cases} p_{1x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \\ p_{2x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \\ p_{1y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 \\ p_{2y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2} = m_2 \dot{y}_2 \end{cases}$$

Formamos el hamiltoniano desparjando las velocidades:

$$\mathcal{H} = \sum p_i \cdot q_i - \mathcal{L} = \frac{p_{1x}^2 + p_{1y}^2}{2m_1} + \frac{p_{2x}^2 + p_{2y}^2}{2m_2} + V(r)$$

Las ecuaciones de Hamilton quedan de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{1x}} = \frac{p_{1x}}{m_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{2x}} = \frac{p_{2x}}{m_2} \\ \dot{y}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{1y}} = \frac{p_{1y}}{m_1} \\ \dot{y}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{2y}} = \frac{p_{2y}}{m_2} \end{cases}$$

para las velocidades. Por otro lado, las fuerzas son:

$$\begin{cases} \dot{p}_{1x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = -\frac{dV}{dr} \frac{x_1 - x_2}{r} \\ \dot{p}_{2x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \frac{dV}{dr} \frac{x_1 - x_2}{r} \\ \dot{p}_{1y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_1} = -\frac{dV}{dr} \frac{y_1 - y_2}{r} \\ \dot{p}_{2y} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_2} = \frac{dV}{dr} \frac{y_1 - y_2}{r} \end{cases}$$

Utilizando el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior.

### 3. Tercer ejercicio.

Para calcular que son constantes de movimiento veremos como la derivada temporal para cada magnitud se anula:

$$\frac{dP_x}{dt} = \dot{p}_{1x} + \dot{p}_{2x} = \frac{dV}{dr} \frac{x_1 - x_2}{r} - \frac{dV}{dr} \frac{x_1 - x_2}{r} = 0$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \dot{p}_{1y} + \dot{p}_{2y} = \frac{dV}{dr} \frac{y_1 - y_2}{r} - \frac{dV}{dr} \frac{y_1 - y_2}{r} = 0$$

$$\frac{dK_x}{dt} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 - P_x - t \frac{dP_x}{dt} = P_x - P_x - 0 = 0$$

$$\frac{dK_y}{dt} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 - P_y - t \frac{dP_y}{dt} = P_y - P_y - 0 = 0$$

Conservándose pues las magnitudes.

### 4. Cuarto ejercicio

El corchete de Poisson se calcula como sigue para dos funciones  $f$  y  $g$  dependientes de las coordenadas generalizadas  $q$  y  $p$ :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Para los casos que nos ocupan:

$$\{K_x, P_x\} = \{m_1x_1 + m_2x_2, p_{1x} + p_{2x}\}$$

eliminando el término temporal de  $K_x$  al anularse el corchete de Poisson  $\{P_x, P_x\}$ .  
Aplicando propiedades:

$$\{K_x, P_x\} = m_1 \{x_1, p_{1x} + p_{2x}\} + m_2 \{x_2, p_{1x} + p_{2x}\}$$

Ambos corchetes dan 1, por lo que el resultado es  $m_1 + m_2$ .

Para el siguiente caso,  $\{K_y, \mathcal{H}\}$ , eliminando el término temporal de  $K_y$ :

$$\{K_y, \mathcal{H}\} = \{m_1y_1 + m_2y_2, \mathcal{H}\} = m_1 \{y_1, \mathcal{H}\} + m_2 \{y_2, \mathcal{H}\} = m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2 = P_y$$

Para el último caso,  $\{J, P_y\}$ , consideramos que  $J = x_1p_{1y} + x_2p_{2y} - y_1p_{1x} - y_2p_{2x}$   
Los términos en  $y$  de los momentos no contribuyen, así que se simplifica el corchete a:

$$\{y_i, P_y\} p_{ix}$$

Como el corchete en cuestión da 1, la suma dará el momento total  $P_x$ .