Actividad Teoría de Campos

Jesús María Mora Mur

February 1, 2026

1 Primer ejercicio

Si sabemos que $\vec{\omega}$ es constante, con coordenadas $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, calculamos el vector $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, considerando que $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z, x\omega_z - z\omega_x, y\omega_x - x\omega_y)$$

Se pide calcular la divergencia de dicho vector, así pues:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Esto ocurre porque ninguna de las componentes del vector dependen de sí mismas. Al derivar, todo se convierte en constante, quedando anulado.

2 Segundo ejercicio

Sabemos, según la *Segunda Ley de Newton*, que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Por lo que la aceleración será:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = \frac{500 - 2 \cdot 10^5 \cdot t}{0.002} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Para conseguir la velocidad integraremos la expresión y la evaluaremos donde proceda:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} \, dt = \frac{1}{0.002} \int \left(500 - 2 \cdot 10^5 \cdot t\right) dt = \frac{1}{0.002} \left(500t - 10^5 t^2\right)$$

Evaluado para el momento de salida, en $t = 10^{-3}$ s:

$$v\left(10^{-3}\right) = \frac{1}{0.002} \cdot \left(500 \cdot 10^{-3} - 10^5 \cdot 10^{-6}\right) = \frac{1}{0.002} \cdot \frac{2}{5} = 200 \, \mathrm{m/s}$$

3 Tercer ejercicio

Considerando que $m_1 = 0.495\,\mathrm{kg}$ y $m_2 = 0.505\,\mathrm{kg}$, sabemos que la masa m_1 se opone al movimiento del sistema. Por ende, la fuerza neta total será:

$$F_{\mathrm{neta}} = F_2 - F_1 = (m_2 - m_1) \cdot g$$

Por otro lado, sabemos también que la fuerza neta corresponde al sistema en su conjunto. Considerando, según los datos, que la cuerda y polea tienen peso nulo:

$$F_{\mathrm{s}} = (m_1 + m_2) \cdot a_{\mathrm{s}}$$

donde a_{s} es la aceleración del sistema. Despejando obtenemos su valor:

$$a_{\mathrm{s}} = \frac{F_{\mathrm{neta}}}{m_1 + m_2} = 0.0981\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

A partir de esto, sabemos que el sistema está sujeto a un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado. Al no tener el dato de tiempo, utilizaremos la siguiente igualdad para calcular la velocidad cuando se haya recorrido un metro:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta r$$

Despejando,

$$v = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta r} \approx 0.443\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

4 Cuarto ejercicio

Calculamos los momentos lineales para cada partícula:

$$\vec{p}_1 = 5 \cdot (1, 1, 0) = (5, 5, 0)\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{p}_2 = 2 \cdot (0, 1, 2) = (0, 2, 4)\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\vec{p}_3 = 3 \cdot (1, -2, 4) = (3, -6, 12)\ \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Calculamos los momentos angulares como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-5, 5, 5)$$

$$\vec{L}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (2, 8, -4)$$

$$\vec{L}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = (18, 3, -3)$$

Por lo que el momento total será:

$$\vec{L}_t = \sum_i \vec{L}_i = (15, 16, -2)$$

5 Quinto ejercicio

Si $\vec{N}$ es constante, podemos afirmar que:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = \int \vec{N} \cdot dt$$

considerando que el momento es constante sabemos que $\vec{L} = \vec{N} \cdot t$. A los tres segundos el momento angular será:

$$\vec{L}(3) = (9, -12, 6)$$

6 Sexto ejercicio

Aplicaremos las transformaciones relativistas para la contracción del espacio:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$$

Despejando para v:

$$v = c_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{L^2}{L_0^2}} = 29979245,8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

7 Séptimo ejercicio

La longitud no se contrae tan apenas, al volar el avión a muy poca velocidad con respecto a la luz. Aplicando las transformaciones relativistas:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \approx 100 \, \mathrm{m}$$

La variación es imperceptible para una calculadora estándar.

8 Octavo ejercicio

Sabemos que un oscilador armónico cumple la siguiente función de posición con respecto a tiempo:

$$x(t) = A\cos(\omega t \mp \phi)$$

Derivando dicha expresión llegaremos a la velocidad, que resulta:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t \mp \phi)$$

La velocidad máxima se alcanzará cuando el coseno sea 1 (su máximo). Por ende, será $v = A\omega$.

Por otro lado, la aceleración se expresa como:

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t \mp \phi)$$

En el extremo, el coseno es 1, al igual que en la posición. Así, la aceleración en el punto será $a = -A\omega^2$.

Por último considerando la relación del periodo con la masa y la constante elástica:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

despejamos k:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 3.158\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

9 Noveno ejercicio

Calculamos en primer lugar la gravedad lunar partiendo de la *Ley de la Gravitación Universal*:

$$|\vec{g}| = g_l = \frac{G\cdot M}{r^2} = 1.75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Aplicando las ecuaciones del movimiento en caída libre, la posición final del objeto pasado un segundo será:

$$\vec{r}_f = \frac{1}{2}g_l t^2 = 0.873\,\mathrm{m}$$

Por otro lado, sabemos que el periodo de un péndulo viene definido por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L es la longitud del péndulo y g la gravedad. Dividiendo los periodos de Tierra y Luna entre sí, obtenemos la relación que sigue:

$$\frac{T_T}{T_L} = \sqrt{\frac{g_L}{g_T}}$$

de donde obtenemos que

$$T_L = \frac{T_T}{\sqrt{\frac{g_L}{g_T}}} = 2.37\,\mathrm{s}$$

10 Décimo ejercicio

Suponiendo que la esfera se encuentra sobre el plano XY en $z = 0$, proponemos coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

El centro de masas queda calculado como:

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

donde el elemento de volumen deberá respetar las coordenadas y V es el volumen de la semiesfera, $V = \frac{2}{3}\pi R^3$. Cambiando a esféricas:

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\int r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Dividimos la integral con los límites de la semiesfera:

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{R} r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{R^4}{4}\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$\overline{z} = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\frac{R^4}{8}\,d\phi = \frac{1}{V}\frac{\pi R^4}{4}$$

sustituyendo el volumen:

$$\overline{z} = \frac{3}{8}R$$

esto es, el centro de masas queda situado en la posición de $3/8$ del radio de la semiesfera.